SOMMAIRE

++++++++

7. L'objet des entiers.

Axiome de l'infini. Axiomes de Plano.

Propriété universelle généralisée.

Addition. Structure de monoïde abélien.

Ordre dans N.

Problèmes.

Bibliographie.

Problèmes dans les topos.

1. Quelques rappels.

1.1. Un *topos élémentaire* est une catégorie $\mathcal{E}$ vérifiant les énoncés suivants :

(i) $\mathcal{E}$ a des limites inductives et projectives finies ;

(ii) $\mathcal{E}$ admet une exponentiation : pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, le foncteur $() \times A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ admet un adjoint à droite, noté $()^A$;

(iii) $\mathcal{E}$ possède une flèche $v : 1 \longrightarrow \Omega$ telle que pour tout $X \in |\mathcal{E}|$ les flèches de X vers Ω donnent par produit fibré avec v exactement les sous-objets de X.

On peut réduire cette axiomatique, comme l'ont montré des travaux récents de A. Kock et Ch. Mikkelsen [5], et décrire par exemple avec F.W. Lawvere [7] un topos élémentaire comme une catégorie cartésienne fermée où la notion de sous-objet est représentable.

1.2. On sait que pour un topos $\mathcal{E}$ le foncteur de plongement dans la catégorie $\mathcal{E}_p$ des morphismes partiels admet un adjoint à droite. Cette propriété peut d'ailleurs être substituée à l'axiome (iii).

Nous allons indiquer un autre plongement intéressant ci-dessous.

1.3. On sait aussi que pour tout objet X d'un topos $\mathcal{E}$, la catégorie $\mathcal{E}/_X$ des objets au-dessus de X est encore un topos et que toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ détermine un foncteur $f^* : \mathcal{E}/_Y \longrightarrow \mathcal{E}/_X$ lequel admet à la fois un adjoint à gauche (noté Σ_f) et un adjoint à droite (noté Π_f).

Si on se limite aux sous-objets de X, on obtient une algèbre de Heyting $\mathcal{O}(X)$ et le foncteur f^* induit $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$, lequel admet également un adjoint à droite ($\overline{\forall f}$, induit par Π_f) et à gauche (noté $\overline{\exists f}$, défini en prenant l'image). Par l'adjonction cartésienne les objets de $\mathcal{O}(X)$ reviennent aux points de Ω^X et l'action des trois derniers foncteurs peut se décrire par des flèches du topos. Ainsi prendre l'image par A x f d'un sous-objet de A x X revient à faire suivre l'adjointe cart´sienne de sa fonction caractéristique par la flèche $\exists f : \Omega^X \longrightarrow \Omega^Y$, laquelle correspond précisément à l'image par $\Omega^X \times f$ de $\in_X \xrightarrow{\ =\ } \Omega^X \times X$ (le sous-objet caractérisé par l'évaluation).

1.4. On peut définir la catégorie des relations dans le topos $\mathcal{E}$ (notée Rel($\mathcal{E}$)) de la façon suivante :

on pose $|\mathrm{Rel}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$;

une flèche de X vers Y dans Rel($\mathcal{E}$) est un sous-objet de X x Y dans $\mathcal{E}$ - plus exactement une flèche de X x Y vers Ω ; la composition de $\phi : X \times Y \longrightarrow \Omega$ et $\psi : Y \times Z \longrightarrow \Omega$ se fait en prenant le produit fibré P au-dessus de Y des sous-objets correspondant à ϕ et ψ et en prenant la fonction caractéristique de l'image de P dans X x Z.

La vérification du fait que Rel($\mathcal{E}$) est une catégorie est laissée au lecteur.

On plonge $\mathcal{E}$ dans Rel($\mathcal{E}$) en associant à $f : X \longrightarrow Y$ la flèche $(1_X, f) : X \longrightarrow X \times Y$; ce plongement se factorise à travers celui - évident - de $\mathcal{E}_p$ dans Rel($\mathcal{E}$).

<u>*Proposition.*</u>

Le plongement I de $\mathcal{E}$ dans Rel($\mathcal{E}$) admet un adjoint à droite.

Puisque pour tous $X, Y \in |\mathcal{E}|$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Rel}(\mathcal{E})\,[I(X), Y] &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}[X \times Y, \Omega] \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}[X, \Omega^Y] \end{aligned}$$

on voit que les foncteurs

$$\mathrm{Rel}(\mathcal{E})\,[I(\ ), Y] \text{ sont représentables.}$$

Il y a donc un adjoint, dont la valeur en Y est Ω^Y. Explicitons sa valeur sur les morphismes : à $\phi : X \dashrightarrow Y$ correspondra $\Omega^\phi : \Omega^X \longrightarrow \Omega^Y$ définie comme l'adjointe cartésienne de la fonction caractéristique du sous-objet de $\Omega^X \times Y$ obtenu en prenant l'image du produit fibré de $\in_X$ et de $R\phi$ au-dessus de X.

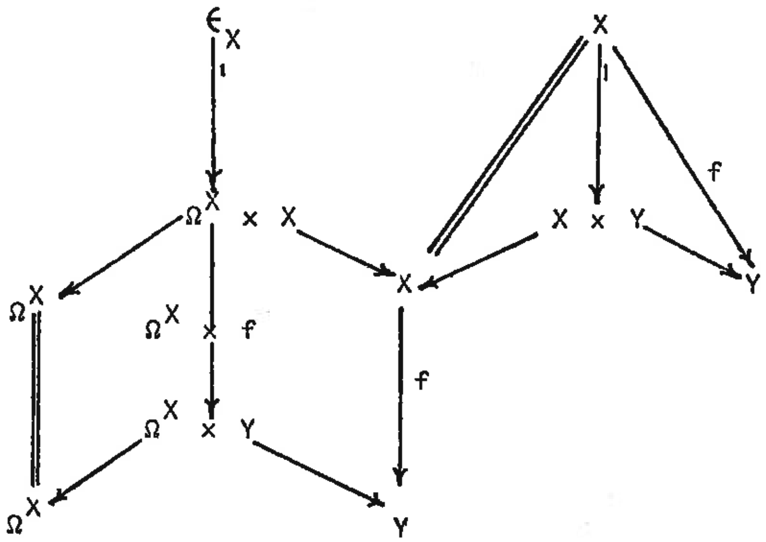
$$\begin{tikzcd}
 & \in_X \arrow[d] & & R_\phi \arrow[d] & \\
 & \Omega^X \times X \arrow[dl] \arrow[dr] & & X \times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Omega^X & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

Dans $\mathcal{E}ns$, on trouve que Ω^{ϕ} envoie chaque $X' \subseteq X$ sur $\{y \mid (\exists x)\ (x \in X'$ et $\phi(x, y)$ est vrai$)\}$.

Si ϕ correspond au graphe d'une application

$f : X \longrightarrow Y$, X' va sur $\{y \mid (\exists x)(x \in X'$ et $y = f(x)\}$.

Ceci suggère qu'en faisant précéder l'adjoint en question du plongement I on trouve le foncteur "quantification existentielle" (qui envoie X sur Ω^X et f sur $\exists f$) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Effectivement, l'image du produit fibré de $\in_X$ et de $(1_X, f)$ - donc de $\in_X$ - dans $\Omega^X \times Y$ est bien celle du composé vertical ci-dessous.



2. L'objet des Monos.

Soient X et Y deux objets du topos $\mathcal{E}$. On se propose de définir un sous-objet de Y^X dont les points correspondent exactement aux monomorphismes de X vers Y.

2.1. Un mono de X vers Y est caractérisé par le fait que son équivalence nucléaire est la diagonale de X.

La fonction caractéristique de la diagonale Δ_X, fonction notée $\langle =_X \rangle$, a pour adjointe cartésienne la flèche $=_X \, : 1 \longrightarrow \Omega^{X \times X}$.

L'application "équivalence nucléaire" de Y^X vers $\Omega^{X \times X}$ (notée $\hat{\varphi}$) peut s'obtenir comme adjointe de la flèche de $Y^X \times X \times X$ vers Ω caractérisant le sous-objet $K \xrightarrow{k} Y^X \times X \times X$, noyau du couple

$$\begin{tikzcd}
 & Y^X \times X \arrow[dr, "ev"] & \\
Y^X \times X \times X \arrow[ur, "\hat{pr}_3"] \arrow[dr, "\hat{pr}_2"'] & & Y \\
 & Y^X \times X \arrow[ur, "ev"'] &
\end{tikzcd}$$

(cest-à-dire, dans $\mathcal{E}ns$, l'ensemble des triples (f, x_1, x_2) tels que $f(x_1) = f(x_2)$).

L'objet Mono (X, Y) est alors défini par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Mono}}\,(X, Y) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "="] \\
Y^X \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \Omega^{X \times X}
\end{tikzcd}$$

2.2. *Proposition.*

Pour tout objet T du topos $\mathcal{E}$, on a une bijection naturelle

$$Hom_{\mathcal{C}}\,[T,\ \underline{Mono}\ (X,\ Y)] \cong Mono_{\mathcal{C}/T}\ [X \times T,\ Y \times T]$$

(le second membre représentant l'ensemble des monomorphismes de $X \times T$ vers $Y \times T$ dans $\mathcal{C}/T$).

Par adjonction cartésienne, les flèches $g : T \longrightarrow Y^X$ correspondent bijectivement aux flèches $\hat{g} : T \times X \longrightarrow Y$; ces dernières sont en bijection avec les $g' = (\hat{g},\ p) :$
$T \times X \longrightarrow T \times Y$,
p désignant la projection $T \times X \longrightarrow T$.

Nous allons montrer que la condition "$\hat{\phi}g$ se factorise à travers $=_X$" équivaut à "g' est un mono". Or la première revient à la commutativité du rectangle central ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[rrr] \arrow[dr, "T\times\Delta"] \arrow[ddd, dashed, "\bar{g}"'] & & & X \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[ddd] \\
& T \times X \times X \arrow[r, "pr"'] \arrow[d, "g \times X \times X"] \arrow[dl, phantom, "①"] \arrow[r, phantom, "p.f.", shift left=4] & X \times X \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\begin{array}{c}p.f.\\ <=_X>\end{array}"] & \\
& Y^X \times X \times X \arrow[r, "\phi"] & \Omega & \\
K \arrow[ur, "k"] \arrow[rrr] \arrow[rrr, phantom, "p.f.", shift left=3] & & & 1 \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

Si ce rectangle commute, le composé $(g \times X \times X)(T \times \Delta)$ se factorise à travers K en $k\bar{g}$ et le carré ① est un produit fibré (tenant compte du fait que $T \times \Delta$ est un mono) ; réciproquement, si le produit fibré de k et $g \times X \times X$ est un carré du type ①, alors le rectangle central est commutatif (par l'associativité des produits fibrés).

La condition sur ① se trouvera remplie si et seulement si $T \times \Delta$ est le noyau des composés

$$ev\ \hat{pr}_3\ (g \times X \times X) \text{ et } ev\ \hat{pr}_2\ (g \times X \times X)$$

(d'après un lemme classique)

$$\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[r, "T \times \Delta"] & T \times X \times X \arrow[r, "g \times X \times X"] \arrow[d, shift right, "\hat{p}_3"'] \arrow[d, shift left, "\hat{p}_2"] & Y^X \times X \times X \arrow[d, shift right, "\hat{p}_3"'] \arrow[d, shift left, "\hat{p}_2"] & \\
& T \times X \arrow[r, "g \times X"'] & Y^X \times X \arrow[r, "ev"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ou encore des composés

$$\hat{g} \circ \hat{pr}_3 \text{ et } \hat{g} \circ \hat{pr}_2.$$

Il reste à montrer que cette propriété équivaut au fait que $(\hat{g}, p)$ soit un mono, ce qui peut se vérifier dans les ensembles : si nous désignons par (t, x_1, x_2) un élément quelconque de $T \times X \times X$, les deux propriétés se traduisent par la condition

$$\text{"}\hat{g}(t, x_1) = \hat{g}(t, x_2) \text{ entraîne } x_1 = x_2\text{"}.$$

<u>Corollaire</u>.

Pour $T = 1$, on obtient la bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}\ [1, \underline{\mathrm{Mono}}\ (X, Y)] \cong \mathrm{Mono}_{\mathcal{E}}\ (X, Y).$$

Les points de Mono (X, Y) correspondent donc exactement aux monos de X vers Y dans $\mathcal{E}$. Mais ceux-ci ne déterminent pas entièrement l'objet Mono (X, Y).

2.3.1. *Proposition.*

Si X, Y, Z sont des objets du topos $\mathcal{E}$, il existe une flèche unique de Mono (X, Y) x Mono (Y, Z) vers Mono (X, Z) factorisant la composition C de $Z^Y \times Y^X$ vers Z^X.

Pour montrer cela, il suffit - compte tenu du lemme de Yoneda - de décrire une application satisfaisante de

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}$(T, Mono (Y, Z) x Mono (X, Y)) vers

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}$(T, Mono (X, Z)) pour tout objet T du topos.

Soit donc (g, f) un élément du premier ensemble, ou plus exactement, l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(T, Z^Y \times Y^X)$ qui lui correspond canoniquement. A ces deux flèches sont associés deux monos $f' : T \times X \xrightarrow{-} T \times Y$ et $g' : T \times Y \xrightarrow{-} T \times Z$ (en utilisant les notations de la proposition précédente) dont le composé est l'associé de C(g, f), comme il résulte de la comparaison des diagrammes suivants, où les

$$\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[r, "(g,\, f) \times X"] & Z^Y \times Y^X \times X \arrow[r, "Z^Y \times ev"] \arrow[dr, "C \times X"'] & Z^Y \times Y \arrow[r, "ev"] & Z \\
 & & Z^X \times X \arrow[ur, "ev"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T \times X \arrow[r, "f' = (\hat{f},\, p)"] & T \times Y \arrow[r, "g \times Y"] \arrow[dr, "g' = (\hat{g},\, p)"'] & Z^Y \times Y \arrow[r, "ev"] & Z \\ & & T \times Z \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

composés horizontaux sont égaux.

Mais comme g'f' est un mono, C(g, f) se factorise à travers Mono (X, Z), ce qui fournit l'image cherchée du couple (g, f). En remarquant que l'application ainsi définie est bien naturelle, on achève la démonstration.

2.3.2. En utilisant une technique semblable on peut montrer par exemple que dans le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \underline{\mathrm{Mono}}\ (X,\ Z) \arrow[d] \\ Z^Y \times Y^X \arrow[r, "C"] & Z^X \end{tikzcd}$$

i est un sous-objet de $Z^Y \times \underline{\mathrm{Mono}}\ (X, Y)$, ou encore que si $f : X \longrightarrow Y$ est un mono, alors pour tout Z le composé

$\underline{\mathrm{Mono}}\ (Z, X) \longrightarrow X^Z \xrightarrow[f^Z]{} Y^Z$ se factorise à travers

$\underline{\mathrm{Mono}}\ (Z, Y) \longrightarrow Y^Z$, de même que

$\underline{\mathrm{Mono}}\ (Y, Z) \longrightarrow Z^Y \xrightarrow[Z^f]{} Z^X$ se factorise à travers

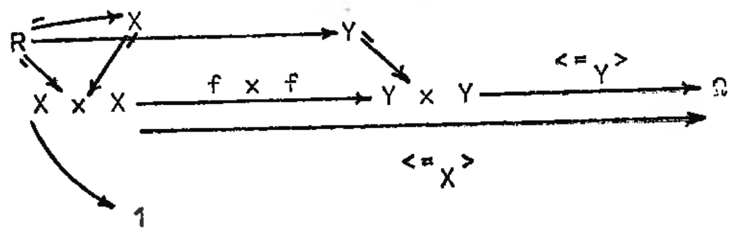
$\underline{\mathrm{Mono}}\ (X, Z) \longrightarrow Z^X$.

2.4. Autre construction de l'objet des Monos.

2.4.1. Si $\mathcal{E}$ est le topos des ensembles, *une flèche $f : X \longrightarrow Y$ est un mono si et seulement si la formule suivante est vraie :*

$$(\forall\ x_1 \in X)(\forall\ x_2 \in X)[(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)].$$

En fait, cette propriété vaut pour un topos quelconque. Dire que f est un mono, c'est dire que son équivalence nucléaire (notée R, avec les projections) est contenue dans la diagonale de X, ou encore que le sous-objet de X x X caractérisé par $<=_Y>$ (f x f) est contenu dans le sous-objet caractérisé par $<=_X>$.



Mais ceci revient à l'égalité de $\Rightarrow (<=_Y>\ (f \times f),\ <=_X>)$ et $v_{X \times X}$ ou au fait que l'on obtienne le vrai en quantifiant universellement la première flèche le long de $X \times X \longrightarrow 1$, c'est-à-dire en formant la formule indiquée dans l'énoncé.

2.4.2. La remarque précédente suggère la construction suivante pour <u>Mono</u> (X, Y).

Désignons par ϕ_1 et ϕ_2 les composés $ev.\hat{pr}_3$ et $ev.\hat{pr}_2$

$$\begin{tikzcd} Y^X \times X \times X \arrow[r, shift left, "\hat{pr}_3"] \arrow[r, shift right, "\hat{pr}_2"'] & Y^X \times X \arrow[r, "ev"] & Y \end{tikzcd}$$

et par α et β respectivement les composés supérieurs et inférieurs ci-dessous

$$\begin{tikzcd} Y^X \times X \times X \arrow[r, "(\phi_1, \phi_2)"] \arrow[dr, "pr"'] & Y \times Y \arrow[r, "<=_Y>"] & \Omega \\ & X \times X \arrow[ur, "<=_X>"'] & \end{tikzcd}$$

En quantifiant la flèche $\alpha \Longrightarrow \beta$ universellement le long de la projection $Y^X \times X \times X \longrightarrow Y^X$, on détermine un sous-objet $m : M \longrightarrow Y^X$ - défini par la formule

$$(\forall\, x_1 \in X)(\forall\, x_2 \in X)[(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)].$$

C'est bien l'objet <u>Mono</u> (X, Y) défini plus haut, car pour tout $T \in |\mathcal{E}|$, une flèche $g : T \longrightarrow Y^X$ se factorise à travers m si et seulement si $g \times X \times X$ suivie de $\alpha \Longrightarrow \beta$ donne le vrai, donc ssi $\alpha(g \times X \times X) \leqslant \beta(g \times X \times X)$.

Mais comme l'on a toujours $\alpha \geqslant \beta$ (d'après la définition de ces flèches) et comme α n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de Ker (ϕ_1, ϕ_2), c'est-à-dire la flèche ϕ définie en 2.2., on s'aperçoit facilement que cette condition équivaut à l'égalité de

$$\phi(g \times X \times X) \text{ et } <=_X> pr$$

exigée là-bas.

3. L'objet des épis.

3.1. Une flèche de X vers Y est un épi si et seulement si son image est isomorphe à son but.

L'application "image" de Y^X vers Ω^Y peut s'obtenir comme adjointe de la flèche de $Y^X \times Y$ vers Ω caractérisant le sous-objet image du couple

$$(\Pi_1, ev) : Y^X \times X \longrightarrow Y^X \times Y.$$

L'objet épi est alors défini par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Epi}}(X, Y) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\hat{v}_Y"] \\ Y^X \arrow[r, "im"] & \Omega^Y \end{tikzcd}$$

3.2. *Proposition.*

Pour tout objet T du topos $\mathcal{E}$, on a une bijection naturelle

$$Hom_{\mathcal{E}}[T, \underline{Epi}(X, Y)] \cong Epi_{\mathcal{E}/T}[T \times X, T \times Y].$$

Nous allons voir que $g : T \longrightarrow Y^X$ vérifie la condition $im\ g = \hat{v}_Y\ c^{te}$ ou $\widehat{im}(g \times Y) = v_{T \times Y}$ si et seulement si

$g' = (\hat{g}, p) : T \times X \longrightarrow T \times Y$ est un épi.

Or ceci résulte du fait que les images sont universelles et que le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "{(t,\ x)}"] \arrow[drrr, bend left, "{(f,\ x)}"] \arrow[dddr, bend right, "{(t,\ y)}"'] & & & & \\
& T \times X \arrow[rr, "g \times X"'] \arrow[dd, "{g' = (p,\ \hat{g})}"'] & & Y^X \times X \arrow[dl] \arrow[dd] & \\
& & I \arrow[rr, "{(\Pi_1,\ ev)}"] \arrow[dr] & & 1 \arrow[d, "v"] \\
& T \times Y \arrow[rr, "g \times Y"'] & & Y^X \times Y \arrow[r, "\hat{im}"] & \Omega .
\end{tikzcd}$$

En effet, si $(g \times Y)(t,\ y) = (\Pi_1,\ ev)(f,\ x)$

donc si $\qquad (gt,\ y) = (f,\ ev(f,\ x))$

alors $\qquad \hat{g}(t,\ x) = ev(g \times X)(t,\ x) = ev(gt,\ x)$

$$= ev(f,\ x) = y$$

et le couple $(t,\ x)$ est bien une factorisation - nécessairement unique.

<u>Corollaire</u>.

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}[1,\ \underline{\mathrm{Epi}}\ (X,\ Y)] \cong \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}\ (X,\ Y).$$

3.3. Utilisant le résultat précédent, on peut démontrer des propositions analogues à celles énoncées en 2.3. Ainsi la composition induit une flèche

$$\underline{\mathrm{Epi}}\ (X,\ Y) \times \underline{\mathrm{Epi}}\ (Y,\ Z) \longrightarrow \underline{\mathrm{Epi}}\ (X,\ Z),\ \text{etc.}$$

3.4. Autre construction.

3.4.1. Dans les ensembles, *$f : X \longrightarrow Y$ est un épi si et seulement si la formule*

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

est vraie :

C'est encore vrai pour un topos quelconque, comme le montre le diagramme ci-dessous : f est un épi

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(X,\ f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_Y"] & 1 \arrow[d, "v"] \\
X \times Y \arrow[r, "f \times Y"] \arrow[dr, "p"'] & Y \times Y \arrow[r, "<=_Y>"] & \Omega \\
& Y \arrow[r, "C^{te}"'] & 1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

ssi l'image de $p(X,\ f) = f$ n'est autre que 1_Y.

3.4.2. Pour construire Epi $(X,\ Y)$, on peut former $<=_Y>\ (ev \circ \hat{p}_3,\ p_3)$, que l'on quantifie existentiellement le long de $\hat{p}_2$, puis universellement le long de p_1. La première quantification donne le sous-objet

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r] \arrow[d, tail, "k"] & Y \arrow[r] \arrow[d, tail, "\Delta_Y"] & 1 \arrow[d, tail, "v"] \\
 & Y^X \times X \times Y \arrow[r, "(ev \circ \hat{p}_3 , p_3)"] \arrow[dd, bend right, "\hat{p}_2"] & Y \times Y \arrow[r, "<=_Y>"] & \Omega \\
 & & E \arrow[d, tail] & \\
I \arrow[r, tail] & Y^X \times Y \arrow[r, bend right] & Y^X &
\end{tikzcd}$$

noté I en 3.2. En effet, k étant l'égalisateur de $ev \circ \hat{p}_3$ et p_3, le composé $\hat{p}_2 k = (p_1, p_3)k$ peut encore s'écrire $(p_1, ev \circ \hat{p}_3)k$ ou $(\Pi_1, ev)\hat{p}_3 k$ et la thèse résulte du fait que $\hat{p}_3 k$ est un épi (par exemple, parce que le couple $(1_{Y^X \times X}, ev)$ se factorise à travers k).

La seconde quantification fournit alors le sous-objet $E \rightarrowtail Y^X$, lequel coïncide bien avec l'objet des épis défini plus haut car une flèche g de T vers Y^X se factorise à travers E si et seulement si $g \times Y$ se factorise à travers I, ce qui rejoint la condition "g' est un épi" du 3.2.

4. L'objet des isos.

4.1. Dans toute catégorie cartésienne fermée à limites finies on peut définir l'objet <u>Iso</u> (X, Y) par le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Iso}}\,(X, Y) \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "(n_X \,;\, n_Y)"] \\
Y^X \times X^Y \arrow[r, swap, "(C \circ \sigma,\, C)"] & X^X \times Y^Y
\end{tikzcd}$$

où σ est la symétrie sur $Y^X \times X^Y$, C la composition, n_X et n_Y les flèches neutres.

4.2. Une technique voisine de celle utilisée pour la proposition 2.3.1. permet de montrer que l'on a une bijection naturelle pour tout $T \in |\mathcal{E}|$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(T, \underline{\mathrm{Iso}}(X, Y)) \cong \mathrm{Iso}_{\mathcal{E}/T}(T \times X, T \times Y).$$

4.3. La propriété précédente, jointe au fait que tout topos est balancé (toute flèche qui est à la fois épi et mono est iso) donne immédiatement l'égalité

$$\underline{\mathrm{Iso}}(X, Y) = \underline{\mathrm{Mono}}(X, Y) \cap \underline{\mathrm{Epi}}(X, Y).$$

5. Les sup et les inf internes.

Si l'on se donne dans $\mathcal{E}$ une famille indexée par T de parties de X, on peut former la réunion et l'intersection de la famille en suivant deux idées différentes : on peut dire que

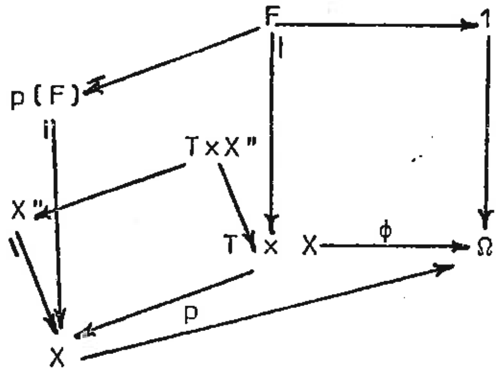
$$\bigcup_{t \in t} X_t = \{x \mid (\exists t)(x \in X_t)\} \quad \text{et}$$

$$\bigcap_{t \in t} X_t = \{x \mid (\forall t)(x \in X_t)\}$$

ou bien décrire une opération "réunion" ou "intersection" de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ vers $\mathcal{P}(X)$ et l'appliquer à l'objet image de la famille donnée. Nous suivrons ces deux pistes pour un topos quelconque et montrerons qu'elles donnent des définitions équivalentes.

5.1. Une famille de sous-objets de X indexée par T, c'est une flèche de T vers Ω^X ou un sous-objet F de T x X caractérisé par $\phi : T \times X \longrightarrow \Omega$.

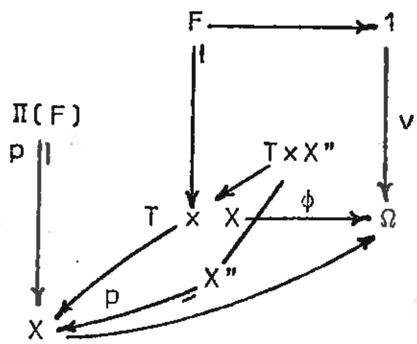
Pour obtenir la réunion de la famille, on quantifie ϕ existentiellement le long de la projection $p : T \times X \longrightarrow X$, autrement dit, on prend l'image $p(F)$.



Cette définition, suggérée par la formule rappelée ci-dessus pour $\mathcal{E}ns$, s'explique par la bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/T \times X}\,[F,\ p^*(X")] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/X}\,[p(F),\ X"].$$

Pour obtenir l'intersection, on quantifie ϕ universellement le long de p, donc on prend $\Pi_p(F)$.



Cette définition se justifie par la bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/T \times X}\,[p^*(X"),\ F] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/T}\,[X",\ \Pi_p(F)].$$

5.2. Dans $\mathcal{E}ns$, si l'on se donne une partie ϕ de $\mathcal{P}(X)$, on peut définir $\bigcup \phi$ par la relation

$$x \in \bigcup \phi \quad \text{ssi } (\exists A)(x \in A \text{ et } A \in \phi)$$

et de même $\bigcap \phi$ par

$$x \in \bigcap \phi \quad \text{ssi } (\forall A)(A \in \phi \Longrightarrow x \in A).$$

Dans un topos quelconque, on considère les sous-objets de $\Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \times X$ caractérisés d'une part par

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \arrow[r, "ev_{\Omega^X}"] & \Omega & \\
\Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \times X \arrow[ur, "\hat{p}_3"] \arrow[rr, "(ev_\Omega \times \hat{p}_3,\ ev_X \hat{p}_1)"] \arrow[dr, "\hat{p}_1"'] & & \Omega \times \Omega \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\wedge"] & \Omega \\
 & \Omega^X \times \Omega \arrow[r, "ev_X"'] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

et d'autre part par

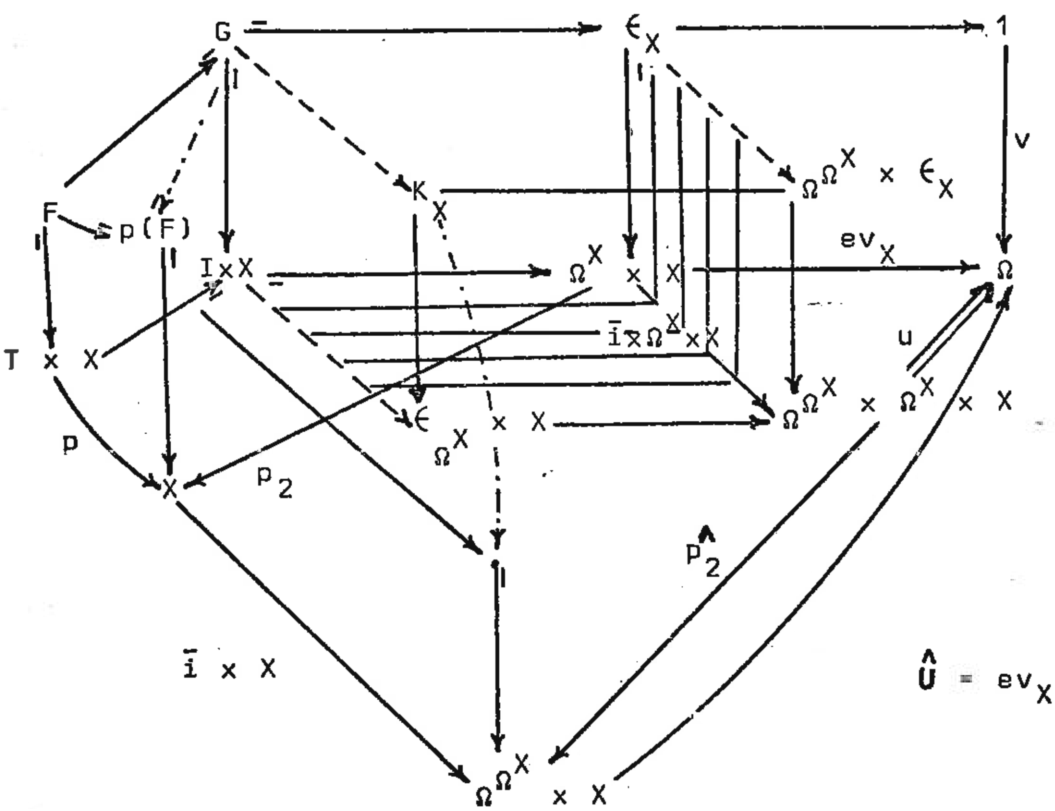
$$\Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \times X \xrightarrow{(ev_\Omega \times \hat{p}_3,\ ev_X \hat{p}_1)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega .$$

Quantifiant la première fonction caractéristique existentiellement le long de $\hat{p}_2$ (vers $\Omega^{\Omega^X} \times X$), on obtient l'adjointe cartésienne d'une flèche appelée "réunion de Ω^{Ω^X} vers Ω^X ; par quantification universelle le long de $\hat{p}_2$ de la seconde, on obtient l'adjointe de la flèche "intersection" de Ω^{Ω^X} vers Ω^X.

Partant alors d'une flèche $\hat{\phi} : T \longrightarrow \Omega^X$, on prend son image, caractérisée par $i : \Omega^X \longrightarrow \Omega$ et donc déterminée par $\bar{i} : 1 \longrightarrow \Omega^{\Omega^X}$ (adjointe cartésienne de i). En faisant suivre $\bar{i}$ de la flèche $\cup$ (réunion), ou de la flèche $\cap$ (intersection), on détermine respectivement des sous-objets de X isomorphes aux p(F) et $\Pi_p(F)$ indiqués précédemment.

Vérifions ceci pour la réunion, par exemple. Il s'agit de voir que p(F) est caractérisé par $ev_X\,[(\cup\,\bar{i}) \times X]$.

Considérons à cet effet le diagramme ci-dessous.



Si I est l'image de $\hat{\phi} : T \longrightarrow \Omega^X$, alors $\bar{I} \times X$ est l'image de $\hat{\phi} \times X$. Soit G l'intersection de cette image avec $\in_X$. La projection p se factorise à travers $p_2 : \Omega^X \times X \longrightarrow X$ et l'image de F par p coïncide avec celle de G (image de F par $\hat{\phi} \times X$) par p_2.

D'autre part, le sous-objet K_X caractérisé par

$$u = \wedge\,(ev_{\Omega^X}\ \hat{p}_3,\ ev_X\ \hat{p}_1) \text{ est l'intersection}$$

de $\in_{\Omega^X} \times X$ et de $\Omega^{\Omega^X} \times \in_X$. L'image de K_X par $\hat{p}_2$ aura image réciproque par $\bar{I} \times X$ le sous-objet p(F) si l'on peut montrer que l'image réciproque de K_X par $\bar{I} \times \Omega^X \times X$

est exactement G ; ceci à cause de l'universalité des images et du fait que $\hat{p}_2(\bar{1} \times \Omega^X \times X) = (\bar{1} \times X)p_2$ est le contour d'un produit fibré. Or le hachuré vertical est clairement un produit fibré et pour le hachuré horizontal, il est également clair que I est l'image réciproque de $\in_{\Omega^X}$ le long de $\bar{1} \times \Omega^X$.

<u>Application</u>.

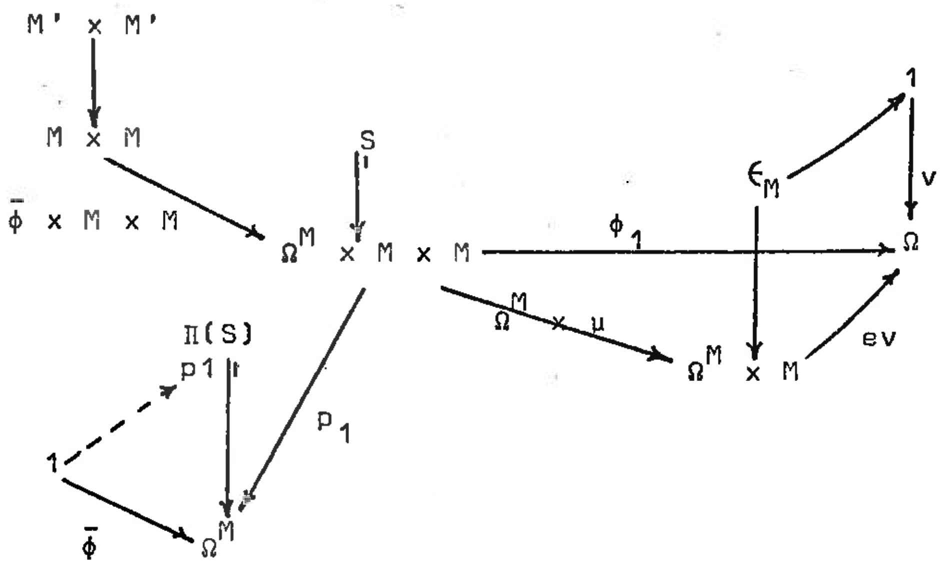
Soit M un objet du topos $\mathcal{E}$ avec une multiplication μ et une unité η qui en fassent un monoïde. On peut définir à l'intérieur du topos "<u>le sous-monoïde de M engendré par une partie X de M</u>" en prenant l'intersection de la famille S(X, M) des sous-monoïdes de M contenant X. Celle-ci est formée des sous-objets $M' \hookrightarrow M$ contenant X et $\{\eta\}$ et dans lesquels μ induit une multiplication μ'. Si on prend pour ϕ_1 le composé horizontal

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^M \times M \arrow[r, "ev"] & \Omega \\
\Omega^M \times M \times M \arrow[ur, "\hat{p}_3"] \arrow[r] \arrow[dr, "\hat{p}_2"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[ur] \arrow[dr] & \Omega \\
 & \Omega^M \times M \arrow[r, "ev"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

et pour ϕ_2 le composé

$$\Omega^M \times M \times M \xrightarrow{id \times \mu} \Omega^M \times M \xrightarrow{ev} \Omega,$$

et si l'on quantifie $\phi_1 \Longrightarrow \phi_2$ universellement le long de la projection sur Ω^M, on détermine un sous-objet $\prod_{p_1}(S) \hookrightarrow \Omega^M$ dont les points correspondent exactement aux $M' \hookrightarrow M$ vérifiant la dernière condition indiquée



En effet, l'adjointe $\bar{\phi}$ de $\phi : M \longrightarrow \Omega$ (caractérisant $M' \hookrightarrow M$) se factorise par $\Pi_{p1}(S)$ si et seulement si

$$\phi_1(\bar{\phi} \times M \times M) \leqslant ev(\Omega^M \times \mu)(\bar{\phi} \times M \times M)$$

ce qui équivaut au fait que l'image par $\bar{\phi} \times \mu$ de $M' \times M'$ est contenue dans $\in_M$ ou encore - puisque

$$(\Omega^M \times \mu)(\bar{\phi} \times M \times M) = (\bar{\phi} \times M)\mu \text{ - au fait que } \mu$$

induit $\mu' : M' \times M' \longrightarrow M'$.

D'autre part, si χ est la fonction caractéristique d'une partie $X \hookrightarrow M$ donnée, on obtiendra l'objet des parties de M contenant χ en formant le composé

$$\Omega^M \times M \xrightarrow{p2} M \xrightarrow{\chi} \Omega$$

et en quantifiant $\chi p2 \Longrightarrow ev$ universellement le long de $p1 : \Omega^M \times M \longrightarrow M$.

Opérant de même pour $\{\eta\}$ - caractérisé par l'adjointe de $\{.\}_M\, \eta : 1 \longrightarrow \Omega^M$ - et imposant les 3 conditions à la fois, on obtient facilement le sous-objet correspondant à S(X, M).

6. Univers dans un topos.

6.1. On dit qu'une <u>classe</u> $\mathcal{U}$ de flèches d'un topos $\mathcal{E}$ est <u>universelle</u> si elle vérifie les propriétés suivantes :

a. $\mathcal{U}$ est stable pour la composition et pour le passage aux images réciproques ;

b. Pour tout objet A du topos, la famille $\mathcal{U}_A$ des flèches de but A contenues dans $\mathcal{U}$ contient les flèches $0 \longrightarrow A$ et $A \xrightarrow[1_A]{} A$;

c. La somme et le produit dans $\mathcal{E}/A$ de deux flèches de $\mathcal{U}_A$ sont dans $\mathcal{U}_A$;

d. $\mathcal{U}_A$ est stable pour l'exponentiation dans $\mathcal{E}/A$: donc si $p : X \longrightarrow A$ et $q : Y \longrightarrow A$ en font partie, alors $\prod_p p^*(q)$ également ;

e. $\mathcal{U}_A$ contient le classifiant $\Omega \times A \xrightarrow[p2]{} A$ du topos $\mathcal{E}/A$.

f. Si $m : X' \xrightarrow{-} X$ et $q : X'' \xrightarrow{=} X$ sont donnés, on aura pour $\varepsilon : X \longrightarrow A$ les relations

$$\varepsilon \in \mathcal{U}_A \Longrightarrow \varepsilon m \in \mathcal{U}_A \quad \text{et}$$

$$\varepsilon q \in \mathcal{U}_A \Longrightarrow \varepsilon \in \mathcal{U}_A.$$

(C'est la stabilité par "sous-trucs" et par "trucs quotients").

Pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, désignons par $\mathcal{E}'_A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}/A$ engendrée par la classe $\mathcal{U}_A$.

Proposition.

Pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, $\mathcal{E}'_A$ *est un sous-topos de* $\mathcal{E}/A$.

C'est immédiat à partir de la définition donnée. L'inclusion canonique préserve toute la structure de topos - c'est un morphisme logique.

Un objet du topos $\mathcal{E}$ est dit $\mathcal{U}$-petit si l'unique flèche vers l'objet final 1 est dans $\mathcal{U}$. Les objets $\mathcal{U}$-petits déterminent un sous-topos $\mathcal{E}'_1$ du topos donné ($\mathcal{E} \cong \mathcal{E}/1$).

Proposition.

Si $f : X \longrightarrow Y$ *est une flèche du topos* $\mathcal{E}$, *le foncteur* $f^* : \mathcal{E}/Y \longrightarrow \mathcal{E}/X$ *induit un foncteur de* $\mathcal{E}'_Y$ *vers* $\mathcal{E}'_X$. *Si* f *est dans* $\mathcal{U}$, *alors les foncteurs* Σ_f *et* Π_f *en induisent également de* $\mathcal{E}'_X$ *vers* $\mathcal{E}'_Y$.

Ceci est une conséquence aisée de la propriété a., du lien entre Π_f et l'exponentiation dans $\mathcal{E}/Y$ et de la proposition précédente.

6.2. Une famille $\mathcal{F}$ de flèches d'un topos, stable par passage aux images réciproques, est dite représentable s'il existe une flèche $f : G \longrightarrow F$ de la famille telle que pour tout $x : B \longrightarrow A$ dans $\mathcal{F}$, il existe une unique flèche $\phi_x : A \longrightarrow F$ donnant $\phi_x^*(f) = x$.

Exemples.

La famille des monos dans un topos est représentée par la flèche $v : 1 \longrightarrow \Omega$ (vrai).

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$, la famille des flèches $x : B \longrightarrow A$ telles que pour tout $a \in A$ l'image réciproque $x^{-1}(\{a\})$ ait un cardinal fini est représentée par la flèche K de $N \times N$ vers N qui au couple (p, q) associe $(p + q) + 1$; la fibre de cette flèche au-dessus de l'entier n est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

On dit qu'une flèche $V \longrightarrow U$ d'un topos est un <u>univers</u> si elle représente une classe universelle $\mathcal{U}$.

Exemple.

La flèche $0 \longrightarrow 1$ est un univers dans tout topos. Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$, la flèche K indiquée ci-dessus est un univers. L'axiome des univers peut s'énoncer dans le cadre des topos : "pour tout objet X du topos $\mathcal{E}$, il existe un univers contenant la flèche $X \longrightarrow 1$".

7. L'objet des entiers.

7.1.a. On dit qu'un topos $\mathcal{E}$ vérifie <u>l'axiome de l'infini</u> s'il existe un objet N dans $\mathcal{E}$, muni de flèches $0 : 1 \longrightarrow N$ et $s : N \longrightarrow N$ telles que pour tout objet X de $\mathcal{E}$ muni de flèches $x : 1 \longrightarrow X$ et $t : X \longrightarrow X$, il existe une flèche unique $r : N \longrightarrow X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, bend right, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"] & N \arrow[d, "r"] \\ & X \arrow[r, "t"] & X \end{tikzcd}$$

b. Si l'on désigne par $\mathcal{E}_e$ la catégorie dont les objets sont les couples formés d'un objet de $\mathcal{E}$ et d'un endomorphisme de cet objet, et dont les flèches sont celles de $\mathcal{E}$ qui commutent avec ces endomorphismes, l'axiome précédent revient à dire que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}[1, U(-)]$ est représentable par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_e}[N, -]$ l'élément universel correspondant étant $1 \xrightarrow{0} N$ (U désigne le foncteur d'oubli des endomorphismes). En fait, le foncteur U a un adjoint à gauche F donné par

$$F(A) = N \times A \xrightarrow{s \times 1_A} N \times A \quad \text{pour } A \in |\mathcal{E}|.$$

En effet, si $(X, t) \in |\mathcal{E}_e|$, on a les bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, X) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, X^A) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_e}[(N, 1), (X^A, t^A)] \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_e}[(N \times A, s \times 1_A), (X, t)]. \end{aligned}$$

L'objet N est appelé <u>l'objet des entiers</u>, les flèches s et 0 sont les flèches <u>successeur</u> et <u>zéro</u>.

7.2. *Axiomes de Peano.*

a. *Proposition.*

$$N \cong 1 \amalg N.$$

Désignons par j_N et j_1 les injections canoniques de N et 1 dans leur somme. Par la propriété universelle de N, il existe une flèche unique ϕ rendant commutative la partie supérieure du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[rr, "s"] \arrow[d, "\phi"] & & N \arrow[d, "\phi"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, bend right, "0"'] & 1 \amalg N \arrow[r, "\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}"] & N \arrow[r, "j_N"] & 1 \amalg N \arrow[d, "\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}"] \\
& N \arrow[rr, "s"] & & N
\end{tikzcd} ;$$

la partie inférieure commute trivialement de sorte que l'on a $\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}\phi = 1_N$. Pour voir que $\phi\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix} = 1_{1 \amalg N}$, il suffit d'observer que

$$\phi\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}j_1 = \phi_0 = j_1 \text{ et que } \phi\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}j_N = \phi s = j_N\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}\phi = j_N.$$

Corollaire.

La flèche successeur est un monomorphisme.

En effet, le composé $\phi s = j_N$ en est un.

b. *Proposition.*

Si un sous-objet N' de N" contient 0" et est "stable pour s", alors N' ≅ N.

En effet, si $0'$ désigne la factorisation de 0 à travers l'inclusion $i : N' \longrightarrow N$ et s' la factorisation de si, il leur correspond par la propriété universelle de N une flèche unique $r : N \longrightarrow N'$ telle que la partie supérieure du diagramme suivant commute. En composant avec i, on trouve $ir = 1_N$; d'où $N' \equiv N$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"] & N \arrow[d, "r"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "0'"] \arrow[dr, "0"'] & N' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "i"] & N' \arrow[d, "i"] \\
 & N \arrow[r, "s"] & N
\end{tikzcd}$$

7.3. Soit k un entier naturel. On définit un système de k flèches $s_i^k : N^k \longrightarrow N^k$, notées aussi s_i (pour k fixé), par les conditions $pr_j\, s_i = 1_N$ si $i \neq j$ et $pr_i\, s_i = s$; ces flèches vérifient la propriété $s_i\, s_j = s_j\, s_i$ ($1 \leq i, j \leq k$). On considère aussi la flèche $\bar{0}_k = (0, 0, \ldots, 0) : 1 \longrightarrow N^k$.

Théorème.

Pour tout objet X, muni d'une flèche $x_0 : 1 \longrightarrow X$ et d'un système de k flèches $f_i : X \longrightarrow X$ telles que

$$f_i\, f_j = f_j\, f_i \quad (1 \leq i, j \leq k),$$

il existe une flèche unique $\phi_k : N^k \longrightarrow X$ (notée aussi $\phi_k(x_0 ; f_1, \ldots, f_k)$) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & N^k \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "\phi_k"] & N^k \arrow[d, "\phi_k"] \\
1 \arrow[ur, "\bar{0}_k"] \arrow[r, "x_0"'] & X \arrow[r, "f_i"] & X
\end{tikzcd}$$

pour tout $1 \leq i \leq k$.

La proposition étant vérifiée trivialement pour $k = 0$ et $k = 1$ (c'est l'axiome de l'infini), on va montrer par récurrence qu'elle s'étend à toute valeur entière de k, en faisant usage du lemme suivant.

<u>Lemme.</u>

Dans toute catégorie cartésienne fermée, la commutativité du diagramme (1) équivaut à celle du diagramme (2).

(1)

$$\begin{tikzcd}
X' \times X \arrow[r, "f' \times f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y' \times Y \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\hat{\phi}"'] & Y \arrow[r, "\hat{\psi}"] & B^{Y'} \arrow[d, "B^{f'}"] \\
A^{X'} \arrow[rr, "g^{X'}"] & & B^{X'}
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $g^{X'}\hat{\phi}$ est l'adjointe cartésienne de g^{ϕ}. D'autre part, $\psi(Y' \times f)$ a pour adjointe $\hat{\psi}f$, et faire précéder la première de $f' \times X$ revient à faire suivre la seconde de $B^{f'}$.

Supposons donc le théorème vrai pour k et montrons comment l'étendre à k + 1 en construisant la flèche

$$\phi_{k+1} = \phi_{k+1}(x_\circ \; ; \; f_1 \ldots f_k \; f_{k+1}).$$

Ce sera l'adjointe de l'unique flèche rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, bend right, "\hat{\phi}_k"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] & N \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] \\
 & X^{N^k} \arrow[r, "f_{k+1}^{N^k}"] & X^{N^k}
\end{tikzcd}$$

Le lemme appliqué au carré de droite donne de suite

$$\phi_{k+1} \, s_{k+1} = f_{k+1} \, \phi_{k+1}.$$

La commutativité du triangle de gauche entraîne celle du carré de droite ci-dessous, ce qui joint à

$$\begin{tikzcd}
 & N^k \times 1 \arrow[r, "N^k \times 0"] \arrow[d, "\phi_k"] & N^k \times N \arrow[d, "\phi_{k+1}"] \\
1 \arrow[ur, "(\bar{0}_k,\, 1)"] \arrow[r, bend right, "x_\circ"'] & X \arrow[r, "1_X"] & X
\end{tikzcd}$$

l'hypothèse de récurrence donne $\phi_{k+1} \, \bar{0}_{k+1} = x_\circ$.

Reste à vérifier que $\phi_{k+1} \, s_i = f_i \, \phi_{k+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, ou, d'après le lemme, que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\hat{\phi}_{k+1}"] \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"'] & X^{N^k} \arrow[d, "X^{s_i}"] \\
X^{N^k} \arrow[r, "f_i^{N^k}"] & X^{N^k}
\end{tikzcd}$$

commute pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Compte tenu du caractère (bi)fonctoriel de l'exponentiation, qui assure la commutativité des rectangles inférieurs ci-dessous, et de l'universalité de N, on aura fini si $X^{s_i}\,\hat{\phi}_k = f_i^{N^k}\,\hat{\phi}_k$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, bend right, "\hat{\phi}_k"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] & N \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] \\
& X^{N^k} \arrow[r, "f_{k+1}^{N^k}"] \arrow[d, "f_i^{N^k}"] & X^{N^k} \arrow[d, "f_i^{N^k}"] \\
& X^{N^k} \arrow[r, "f_{k+1}^{N^k}"] & X^{N^k}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, bend right, "\hat{\phi}_k"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] & N \arrow[d, "\hat{\phi}_{k+1}"] \\
& X^{N^k} \arrow[r, "f^{N^k}_{k+1}"] \arrow[d, "X^{s_i}"'] & X^{N^k} \arrow[d, "X^{s_i}"] \\
& X^{N^k} \arrow[r, "f^{N^k}_{k+1}"] & X^{N^k}
\end{tikzcd}$$

Mais - par le lemme - cette condition équivaut à la commutativité pour $1 \leqslant i \leqslant k$ des diagrammes

$$\begin{tikzcd}
N^k \cong N^k \times 1 \arrow[r, "s_i \times 1"] \arrow[d, "\phi_k"] & N^k \times 1 \cong N^k \arrow[d, "\phi_k"] \\
X \arrow[r, "f_i"] & X
\end{tikzcd}$$

ce qui est vrai par l'hypothèse de récurrence.

<u>Corollaires</u>.

1. Si un sous-objet M de N^k est stable pour les s_i^k et tel que $\bar{0}k$ se factorise à travers M, alors $M \cong N^k$.

   La démonstration est la même que pour $k = 1$.

2. Si un objet X' est muni de flèches $f'_i : X' \longrightarrow X'$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et $x'_0 : 1 \longrightarrow X'$ et si $g : X \longrightarrow X'$

est telle que $gf_i = f'_i g$ pour chaque i et $gx_0 = x'_0$, alors $g \circ \phi_k(x_0 \; ; \; f_1 \dots f_k) = \phi_k(x'_0 \; ; \; f'_1 \dots f'_k)$.

7.4. <u>Addition dans N.</u>

a. Appliquant le théorème précédent au cas où $k = 2$, $X = N$, $x_0 = 0$ et $f_1 = f_2 = s$, on obtient une flèche notée $+$ de N^2 dans N. L'adjointe $\hat{+}$ de cette flèche est l'unique flèche de N dans N^N rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\widehat{id}_N"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\hat{+}"] & N \arrow[d, "\hat{+}"] \\
& N^N \arrow[r, "s^N"] & N^N
\end{tikzcd}$$

Nous allons montrer que N, muni de l'opération d'addition $+$, a une structure de monoïde abélien.

b. La théorie des monoïdes abéliens (au sens des théories algébriques de Lawvere) a pour objets les entiers naturels et pour flèches les matrices à coefficients entiers. Plus précisément, une flèche de p vers q est une matrice de genre (q, p), décrivant un homomorphisme du monoïde abélien libre à q générateurs vers celui à p générateurs ; la composition des flèches est donnée par la multiplication matricielle.

Considérons alors le foncteur $\mathbb{N}$, défini sur cette théorie, à valeurs dans le topos donné, spécifié par les clauses suivantes :

$\mathbb{N}(p) = N^p$ pour tout entier p ;

si ν est une flèche de p vers q, on prend $\mathbb{N}(\nu)$ égal à l'unique flèche de N^p vers N^q rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\bar{0}"] \arrow[dr, "\bar{0}"'] & N^p \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "\mathbb{N}(\nu)"] & N^p \arrow[d, "\mathbb{N}(\nu)"] \\ & N^q \arrow[r, "f_i"] & N^q \end{tikzcd} \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

où $f_i = (f_i^1, \ldots, f_i^q)$ avec $f_i^j = \underbrace{(s \circ s \circ \ldots \circ s)}_{\nu_j^i \text{ fois}} \circ pr_j$

(en convenant que 0 fois s vaut 1_N).

Soit alors μ une flèche de q vers r, $\mathbb{N}(\mu)$ la flèche de N^q vers N^r correspondante et

$g_j = (f_j^1, \ldots, f_j^r)$ avec $g_j^k = \underbrace{(s \circ s \circ \ldots \circ s)}_{\mu_k^j \text{ fois}} \circ pr_k$.

La flèche $\mathbb{N}(\mu)$, précédée de f_i - c'est-à-dire du composé

$\underbrace{(s_q \circ \ldots \circ s_q)}_{\nu_q^i \text{ fois}} \circ \ldots \circ \underbrace{(s_1 \circ \ldots \circ s_1)}_{\nu_1^i \text{ fois}}$ - est égale au

composé

$\underbrace{(g_q \circ \ldots \circ g_q)}_{\nu_q^i \text{ fois}} \circ \ldots \circ \underbrace{(g_1 \circ \ldots \circ g_1)}_{\nu_1^i \text{ fois}}$ précédé de $\mathbb{N}(\mu)$.

Or ce dernier composé, vu comme

$$h_i = (h_i^1, \ldots, h_i^r)$$

a pour k-ième composante la flèche

$$\underbrace{(s \circ s \circ \ldots \circ s)}_{(\nu_q^i \cdot \mu_k^q + \ldots + \nu_1^i \cdot \mu_k^1) \text{ fois}} \circ pr_k$$

$(\nu_q^i \cdot \mu_k^q + \ldots + \nu_1^i \cdot \mu_k^1)$ fois ;

c'est donc la flèche correspondant à s_i dans la définition de $\mathbb{N}(\mu.\nu)$. Le corollaire 7.3, 2 donne alors l'égalité

$$\mathbb{N}(\mu) \circ \mathbb{N}(\nu) = \mathbb{N}(\mu.\nu).$$

On achève facilement de prouver le caractère fonctoriel de $\mathbb{N}$ et le fait que ce foncteur commute aux produits finis.

La flèche $\ddagger$ n'est rien d'autre que $\mathbb{N}((1, 1))$. Et $(1, 1)$ est l'opération à 2 arguments de la théorie des monoîdes abéliens correspondant à l'homomorphisme du monoîde libre à 1 générateur vers celui à 2 générateurs qui factorise le couple (id, id) (où id désigne l'identité sur ce dernier monoîde).

7.5. Relation d'ordre dans N.

a. *Lemme.*

La flèche $(pr_1, +) : N \times N \longrightarrow N \times N$ est un monomorphisme.

D'après la proposition 2.2., il suffit, pour le voir, de montrer que $\hat{s} : N \longrightarrow N^N$ se factorise à travers l'objet $\underline{\text{Mono}}(N, N)$.

Comme s est un mono, la flèche s^N induit un monomorphisme de $\underline{\text{Mono}}(N, N)$ vers $\underline{\text{Mono}}(N, N)$, soit $\underline{\text{Mono}}(N, s)$ (cf. 2.3.2.) ; d'autre part $\widehat{id}_N$ se factorise également à travers $\underline{\text{Mono}}(N, N)$.

Il existe une flèche unique $f : N \longrightarrow \underline{\text{Mono}}(N, N)$ telle que le rectangle supérieur ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r] \arrow[dr, "\widehat{id}_N"'] & \underline{\text{Mono}}(N, N) \arrow[r, "\underline{\text{Mono}}(N, s)"'] \arrow[d] & \underline{\text{Mono}}(N, N) \arrow[d] \\
 & N^N \arrow[r, "s^N"] & N^N
\end{tikzcd}$$

Les composés verticaux sont égaux à $\hat{s}$.

<u>Remarque</u>. Si N est l'ensemble des entiers habituels, le lemme revient à dire que

$$[(a, a + x) = (b, b + y)] \Longrightarrow [a = b \text{ et } x = y].$$

Il implique en particulier que $(a + x = a + y) \Longrightarrow (x = y)$.

b. <u>*Proposition.*</u>

Le sous-objet $(pr_1, +)$ représente une relation d'ordre sur N.

Ceci résulte essentiellement du fait que N, muni de l'addition + est un monoïde abélien - la flèche neutre étant 0. De façon détaillée :

la réflexivité - c'est-à-dire le fait que la diagonale de Δ se factorise à travers $(pr_1, +)$ - résulte de l'égalité $id_N = + (id_N, 0_N)$, mise en évidence par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "(id_N,\ 0_N)"] & N \arrow[d, "(id_N,\ 0_N)"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "(0\ ,0)"'] \arrow[dr, "0"'] & N \times N \arrow[r, "s \times N"] \arrow[d, "+"] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
 & N \arrow[r, "s"] & N
\end{tikzcd}$$

$(0_N = N \to 1 \xrightarrow[0]{} N)$

l'antisymétrie - c'est-à-dire le fait que le diagramme ci-dessous soit un produit fibré - résulte du caractère neutre de 0 et du lemme précédent ;

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "(id_N,\ 0_N)"] \arrow[d, "(0_N,\ id_N)"'] & N \times N \arrow[d, "(pr_1,\ +)"] \\
N \times N \arrow[r, "(+,\ pr_1)"] & N \times N
\end{tikzcd}$$

la transitivité résulte essentiellement de l'associativité de l'addition, laquelle assure la commutativité du diagramme suivant - où le carré extérieur est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
N \times N \times N \arrow[rrr, "{[+(p_1,\, p_2),\, p_3]}"] \arrow[ddd, "{(p_1\,,p_2)}"'] \arrow[dr, "{[p_1,\, +(p_2,\, p_3)]}"] & & & N \times N \arrow[ddd, "p_1"] \arrow[dl, "+"'] \\
& N \times N \arrow[r, "+"] \arrow[d, "p_1"] & N & \\
& N & & \\
N \times N \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rrr, "+"'] & & & N
\end{tikzcd}$$

7.6. Problèmes dans des topos vérifiant l'axiome de l'infini.

a. Etudier la catégorie des monoïdes abéliens internes à un tel topos. Construire explicitement le monoïde abélien libre sur un objet donné.

b. Etudier la flèche $K = s \circ + : N \times N \longrightarrow N$ dans un tel topos. Représente-t-elle un univers, comme c'est le cas pour le topos des ensembles ?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BENABOU J. et J. CELEYRETTE - "Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney" - notes polycopiées du séminaire Benabou, Paris, 1970.

[2] COLE J.C. - "Categories of sets and models of set theory" - Aarhus Universitet Preprint Series n° 52, 1970/71.

[3] FREYD P. - "Aspects of Topoi" - Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 7 (1972), pp. 1-76 + 15 p. de compléments.

[4] KOCK A. et WRAITH G.C. - "Elementary toposes" - Aarhus Universitet Lecture Notes Series n° 30, 1971.

[5] KOCK A. et MIKKELSEN Chr. J. - "Topos-theoretic factorization of non-standard extensions" - Matematisk Institut, Aarhus, 1972.

[6] LAWVERE F.W. - "Quantifiers and Sheaves" - Actes du congrès intern. de math. de Nice, 1970, tome 1, pp. 329 à 334.

[7] LAWVERE F.W. - "Introduction in Toposes, Algebraic Geometry and Logic" - L.N. 274, Springer, 1972, pp. 1 à 12.

[8] MIKKELSEN C.J. - "Colimites in toposes" - en préparation.

[9] TIERNEY M. - "Sheaf theory and the continuum hypothesis" - L.N. 274, Springer, 1972, pp. 13 à 42.